① GS sur $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\bar{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{\bar{w}_2} \right\}$ pour orthonormaliser

$$\Rightarrow \quad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} - \frac{\overbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}^{3}}{\underbrace{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}_{2}} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{u}_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}/6\\\sqrt{2}/6\\2\sqrt{2}/3\end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/6\\1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/6\\0 & 2\sqrt{2}/3\end{pmatrix}$$

② $R = Q^T . A = \begin{pmatrix} \boxed{\sqrt{2}} & 3\sqrt{2}/2 \\ 0 & \boxed{3\sqrt{2}/2} \end{pmatrix}$

$\|\bar{v}_1\|$ $\|\bar{v}_2\|$

Chapitre 12 : Méthode des moindres carrés

Motivation (rappel)

→ Qu'est-ce qu'on fait si $A.\bar{x} = \bar{b}$ incompatible ???

(i.e. il n'a pas de solution)

↓

On peut quand même chercher le(s) $\bar{x}$ tels que

$$\|A\bar{x} - \bar{b}\|$$

soit le plus petit possible.

$\boxed{\text{Déf 12.3}}$ É.d. une matrice $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, une pseudosolution (ou solution au sens des moindres carrés) du SEL (*) $A.\bar{x} = \bar{b}$ (où $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$) est un vecteur $\hat{\bar{x}} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\|A.\hat{\bar{x}} - \bar{b}\| \leq \|A.\bar{x} - \bar{b}\|$$

pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Rq Si $(*)$ est compatible, alors

solution = pseudosolution.

PROP. 12.5 Soient $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

et $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$.

Alors

$$\boxed{\hat{x} \text{ est pseudosolution de } A.\bar{x} = \bar{b}} \iff \boxed{\hat{x} \text{ est solution de } \underbrace{A.\bar{x} = \mathrm{proj}_{\mathrm{Img}(A)}(\bar{b})}_{\text{ce SEL est compatible}}}$$

!!!!

Méthode l'équation normale

THM 12.6 Soient $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$.

Alors

$\hat{x}$ est pseudosolution $\Leftarrow\Rightarrow$ $\hat{x}$ est solution de de $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ $\longrightarrow$ $\underbrace{A^T \cdot A \cdot \bar{x} = A^T \cdot \bar{b}}$

équation normale
(elle est toujours compatible)

$\boxed{\text{EXM } 12.7}$ Calculer les pseudosolutions de

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 1 \\ 65 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ 52 \\ 147 \end{pmatrix}}_{\bar{b}}$$

par la méthode de l'équation normale.

$$A^T \cdot A \cdot \bar{x} = A^T \cdot \bar{b} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 12 & 65 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 1 \\ 65 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 12 & 65 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 52 \\ 147 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 4373 & 79 \\ 79 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10239 \\ 229 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}} \iff$$

Alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4373 & 79 \\ 79 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 10239 \\ 229 \end{pmatrix} = \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 12626/6878 \\ 192536/6878 \end{pmatrix}$$

EXM Calculer la pseudosolution de

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\bar{b}}$$

via l'équation normale,

On veut trouver la solution de

$$A^T \cdot A \cdot \bar{x} = A^T \cdot \bar{b} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \dots$$

Méthode via la décomposition QR

THM 12.13 Soit $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ de rang n et soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Alors

$\hat{x}$ est pseudosolution de $A.\bar{x} = \bar{b}$ $\Leftrightarrow$ $\hat{x}$ est solution de $R.\bar{x} = Q^T.\bar{b}$ où $A = Q.R$ est la décomposition QR de A

$\boxed{\text{EXM (bis)}}$ Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calculer la pseudosolution à partir de résoudre

$$R.\bar{x} = Q^T.\bar{b}$$ où $A = Q.R$ est la décomposition QR

① QR pour A : ① GS à $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_2} \right\}$

$$\Rightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}^{3}}{\underbrace{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2}_{9}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R := Q^T A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

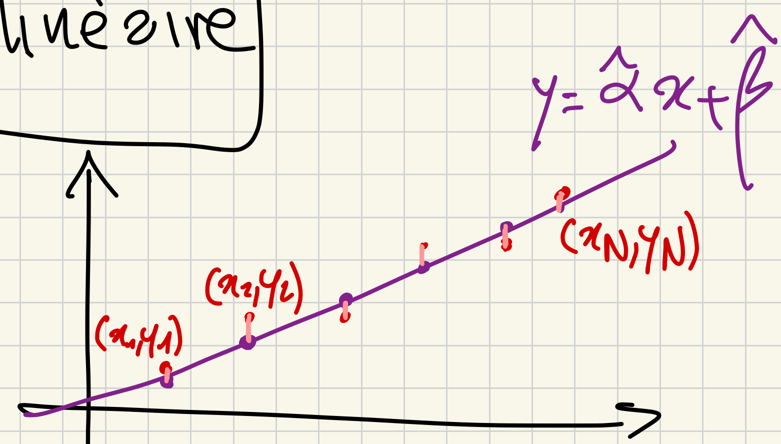
i.e. $\hat{x}$ est solutions de

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Droite de régression linéaire

Idée

Valeur prédite	Valeur réelle
$\hat{\alpha} x_1 + \hat{\beta}$	y_1
$\vdots$	$\vdots$
$\hat{\alpha} x_N + \hat{\beta}$	y_N



droit de régression linéaire $\rightarrow$ On veut $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\underbrace{\hat{\alpha} \cdot x_i + \hat{\beta}}_{} - y_i\right)^2$$

soit le plus petit possible !!!!

Comment calcule-t-on $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$?

$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$ est pseudosolution de $\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{EXM}}$ Calculer la droite de régression linéaire pour la famille de points

$$\{(0,6), (1,0), (2,0)\}$$